CONCOURS ESTP - ENSAM

Filière PC

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 3 heures

1) a) Calculer le développement en série entière de $(1-t)^{-3}$.

b) Soit n un entier naturel. Calculer le coefficient de X^p dans le polynôme $(1+X+X^2+\cdots X^n)^3$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

---

2) Soit E un espace euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé par rapport auquel les coordonnées sont notées (x, y, z).

a) Décrire le sous–ensemble C de E défini par

$$\max(|x|, |y|, |z|) \leqslant 1.$$

b) Décrire le sous–ensemble D de E défini par

$$\min(|x|, |y|, |z|) \geqslant 1.$$

c) Montrer que le sous–ensemble S de E défini par l'équation $x^2+y^2+z^2 = 1+2xyz$ est inclus dans $C \cup D$.

d) Même question pour $x^2+y^2+z^2 = 2xyz-1$.

3) Calculer le déterminant, l'équation caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres associés de la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{pmatrix}.$$

Est–elle diagonalisable ?

4) **Simplifier l'écriture des deux nombres réels définis par** $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}}$ **et** $\sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-13+5\sqrt{17}}{2}}$.

(*Nota Bene* : **on poura rechercher, pour chaque cas, une équation du troisième degré vérifiée par ce nombre**).

5) a) **Tracer la courbe d'équation polaire**

$$\rho = a\,\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}.$$

(On vérifiera qu'elle admet un point double Ω**).**

b) **Déterminer une équation cartésienne du troisième degré de cette courbe** (*Nota Bene* : **on pourra calculer** $(a-x)\rho$).

c) **Calculer l'aire de la boucle délimitée par le point double** Ω.

6) **Soit** E **un espace euclidien orienté de dimension 3 où** $\wedge$ **représente le produit vectoriel. Soient quatre vecteurs** a, b, c, d **de** E **tels que** a **et** b **soient indépendants,** c **est orthogonal à** a **et** d **orthogonal à** b. **Donner une condition nécessaire et suffisante sur** a, b, c **et** d **pour qu'il existe au moins un vecteur** v **tel que** $a\wedge v = c$ **et** $b\wedge v = d$; **montrer qu'alors** v **est unique.**

(*Nota Bene* : **calculer de deux manières différentes le déterminant de la famille** (a,b,v), **et admettre que l'équation** $a\wedge v = c$ **possède, puisque** a **et** c **sont orthogonaux, au moins une solution** w).